Ueber

die optische Axe oder die Cardinale nicht centrirter dioptrischer Systeme.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Adolf Schwarz

aus Rostock.

Rostock.

Carl Boldt'sche Hof-Buchdruckerei.

1892.

Referent: Professor Dr. **Matthiessen.**

In seinen dioptrischen Untersuchungen (Göttingen, 1841) hat Gauss die dioptrischen Gleichungen für paraxiale Strahlen eines centrirten Systems sphärischer Flächen abgeleitet. Er gab Construction und Berechnung des Ortes und der Grösse der Bilder von ausserhalb des dioptrischen Systems befindlichen Objecten an und zwar mit Hülfe sogenannter Cardinalpunkte. Diese Cardinalpunkte, welche durch die Constanten des dioptrischen Systems bestimmt sind, liegen auf der Centrale und eignen sich besonders als Anfang von Coordinatensystemen. Die Beschränkungen, welche Gauss bei der Behandlung des Problems einführte, sind folgende: 1) Alle Centra der sphärischen Flächen liegen auf einer geraden Linie, Centrale genannt. 2) Alle leuchtenden Strahlenbündel sind sehr dünn und verlaufen in unmittelbarer Nähe der Centrale, so dass die Lichtstrahlen einen sehr kleinen Einfallswinkel bilden. 3) Die einfallenden sehr dünnen Strahlenbündel sind homocentrisch. In einer Abhandlung über Fernröhre sind von Casorati[1] die Knotenpunkte für ein innerhalb der Gauss'schen Beschränkungen nicht centrirtes dioptrisches System bestimmt worden, d. h. für ein System, bei welchem die Abstände aller Centra von der Verbindungslinie irgend zweier Centra

[1] Casorati, Felice, Alcuni strumenti topografici a riflessione e le proprietà cardinali dei cannocchiali anche non centrati. Milano 1872. pag. 106.

nur sehr klein ist. Casorati nennt die Verbindungslinie der beiden Knotenpunkte Cardinale. Er geht bei der Behandlung des Problems von folgender Betrachtung aus: Ein Lichtstrahl wird durch eine sphärische Fläche gebrochen. Die Gleichungen einer geraden Linie mit willkürlich gewählten Constanten stellen die Gleichungen des eintretenden Lichtstrahls dar. Die Gleichungen des austretenden Lichtstrahls werden ebenfalls durch die Gleichungen einer geraden Linie mit willkürlichen Constanten dargestellt. Dann bestimmt Casorati die Beziehungen, welche zwischen den Constanten der Gleichungen des eintretenden und des austretenden Lichtstrahls nach optischen Gesetzen innerhalb jener Beschränkungen stattfinden.

Es sollen nun in folgender Arbeit die Gleichungen eines Lichtstrahls gefunden werden, der ungebrochen durch ein innerhalb der Gauss'schen Beschränkungen nicht centrirtes dioptrisches System hindurchgeht, ferner die Hauptbrennpunkte und die Knotenpunkte für ein solches System bestimmt und endlich nachgewiesen werden, dass diese Cardinalpunkte auf dem ungebrochen durch das System hindurchgehenden Strahl, der Cardinale, liegen.

Wir gehen bei der Behandlung des Problems von folgender Betrachtung aus: Vor einer brechenden sphärischen Fläche befindet sich ein leuchtender Punkt, hinter derselben sein Bildpunkt. Es lassen sich dann die nach optischen Gesetzen innerhalb der Beschränkungen bestehenden Beziehungen zwischen den Coordinaten des leuchtenden Punktes und seines Bildpunktes bestimmen.

Die für die vorliegende Arbeit bestehenden Beschränkungen lauten: 1) Alle Centra der sphärischen Flächen sind nur wenig von einer geraden Linie entfernt. 2) Alle Strahlenbündel sind sehr dünn und verlaufen in unmittelbarer Nähe dieser geraden Linie, so dass die einfallenden Lichtstrahlen einen sehr kleinen Winkel mit derselben bilden. 3) Die einfallenden sehr dünnen Strahlenbündel sind homocentrisch.

§ 1. Beziehung zwischen den Abscissen eines leuchtenden Punktes und seines Bildpunktes bezüglich einer einzigen brechenden sphärischen Fläche.

Es sei eine brechende Fläche vorgelegt und ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfang in O liegt (Fig. 1) und dessen x-Axe durch den Mittelpunkt der brechenden Fläche geht. In P_0 befindet sich ein leuchtender Punkt, in P_1 ist sein Bild. $P_0 D P_1$ sei der Weg eines Lichtstrahls.

Es ist nun: $OP_0 = x_0$, $OP_1 = x_1$, $OS = a$, $CS = r$, wobei r positiv ist, wenn C von S ab nach der positiven Richtung der Lichtbewegung liegt; im andern Fall ist r negativ.

Innerhalb der Beschränkungen ist

$$n = \frac{\sin \delta}{\sin \delta_1} = \frac{\delta}{\delta_1} = \frac{\omega + \gamma}{\omega - \gamma_1}.$$

Aus Dreieck $P_0 C D$ ergiebt sich

$$(a + r - x_0) : r = (\omega + \gamma) : \gamma.$$

Aus Dreieck $P_1 C D$ ergiebt sich

$$(x_1 - a - r) : r = (\omega - \gamma_1) : \gamma_1.$$

Durch Division dieser beiden Proportionen erhalten wir

$$\frac{a + r - x_0}{x_1 - a - r} = \frac{\omega + \gamma}{\omega - \gamma_1} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Aus Dreieck $P_0 D P_1$ ergiebt sich weiter

$$\gamma : \gamma_1 = DP_1 : DP_0$$

oder

$$\gamma : \gamma_1 = (x_1 - a) : (a - x_0)$$

oder

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{a - x_0}{x_1 - a};$$

wir hatten bereits gefunden

$$\frac{\omega + \gamma}{\omega - \gamma_1} = n.$$

Setzen wir diese beiden Grössen in die vorige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{a+r-x_0}{x_1-a-r}=n\frac{a-x_0}{x_1-a}$$

oder

$$-\frac{r}{n-1}\cdot\frac{1}{x_0-a}+\frac{nr}{n-1}\cdot\frac{1}{x_1-a}=1.$$

Wir setzen jetzt

$$-\frac{r}{n-1}=f \text{ und } \frac{nr}{n-1}=\varphi,$$

dann erhalten wir

$$\frac{f}{x_0-a}+\frac{\varphi}{x_1-a}=1.$$

§ 2. Erweiterung der vorangehenden Betrachtung für den Fall, dass der leuchtende Punkt und der Mittelpunkt nicht auf der x-Axe des Coordinatensystems liegen.

Wir nehmen an, es sei eine brechende sphärische Fläche vorgelegt. Der Mittelpunkt C sei nur sehr wenig entfernt von der x-Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems. Wir legen durch C eine Gerade, welche parallel der x-Axe ist. Diese Linie schneidet die yz-Ebene im Punkte W (Fig. 2) und die sphärische Fläche im Punkte S, welcher die Coordinaten a b c haben möge. P_0 und P_1 seien Object- resp. Bildpunkt vor resp. hinter der brechenden Fläche. P_0DP_1 sei der Weg eines Lichtstrahls, derselbe liegt mit dem Mittelpunkt der sphärischen Fläche in einer Ebene. Figur 2 giebt ein Bild dieser Ebene. Fällen wir jetzt von P_0 und P_1 Lote nach der Linie, welche parallel der x-Axe des Coordinatensystems durch C gezogen ist, so sind WQ und WQ_1 die x-Coordinaten von P_0 und P_1; dann ergiebt sich aber unmittelbar die Gleichung

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{f}{x_0-a}=\frac{\varphi}{x_1-a}=1,$$

wenn wir $WQ=x_0$ und $WQ_1=x_1$ setzen.

§ 3. Beziehung der y- und z-Coordinaten des leuchtenden Punktes und seines Bildpunktes.

Wir denken uns jetzt dieselbe Ebene in Figur 3 dargestellt. Wir ziehen durch C eine Senkrechte zu SC, welche den eintretenden Strahl in R und den austretenden in R_1 schneidet. Sind die Coordinaten von R und R_1 $x_3 y_3 z_3$ resp. $x_4 y_4 z_4$, so ist $x_3 = x_4 = a + r$. Wir bezeichnen ferner die Coordinaten von D mit $\xi\,\eta\,\zeta$, $\sphericalangle$ DRC mit λ, $\sphericalangle$ DR_1C mit λ_1, $\sphericalangle$ DCS mit ω, $\sphericalangle$ RDC mit δ, $\sphericalangle$ R_1DC mit δ_1.

Die Punkte P_0DR liegen auf einer geraden Linie, mithin müssen die Gleichungen bestehen:

$$\frac{x_0 - \xi}{x_0 - x_3} = \frac{y_0 - \eta}{y_0 - y_3} = \frac{z_0 - \zeta}{z_0 - z_3}.$$

Ebenso liegen DR_1P_1 auf einer geraden Linie, also ist

$$\frac{x_1 - \xi}{x_1 - x_4} = \frac{y_1 - \eta}{y_1 - y_4} = \frac{z_1 - \zeta}{z_1 - z_4}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, wenn wir berücksichtigen, dass $x_3 = x_4 = a + r$ ist,

$$y_3 = \frac{\eta(x_0 - a - r) - y_0(\xi - a - r)}{x_0 - \xi}, \qquad z_3 = \frac{\zeta(x_0 - a - r) - z_0(\xi - a - r)}{x_0 - \xi},$$

$$y_4 = \frac{\eta(x_1 - a - r) - y_1(\xi - a - r)}{x_1 - \xi}, \qquad z_4 = \frac{\zeta(x_1 - a - r) - z_1(\xi - a - r)}{x_1 - \xi}.$$

Es ist nun nach Figur 3

$$\xi = a + r(1 - \cos\omega).$$

Nach unserer Voraussetzung ist aber ω ein sehr kleiner Winkel, also können wir $\cos\omega = 1$ setzen; dann ist also $\xi = a$; setzen wir diesen Werth ein, so ist

$$y_3 = \frac{\eta(x_0 - a - r) + y_0 r}{x_0 - a}, \qquad z_3 = \frac{\zeta(x_0 - a - r) + z_0 r}{x_0 - a},$$

$$y_4 = \frac{\eta(x_1 - a - r) + y_1 r}{x_1 - a}, \qquad z_4 = \frac{\zeta(x_1 - a - r) + z_1 r}{x_1 - a}.$$

Aus Figur 3 folgt:

$$DC : RC = \sin\lambda : \sin\delta,$$

und

$$DC : R_1C = \sin\lambda_1 : \sin\delta_1,$$

Daraus ergiebt sich

$$\frac{RC}{R_1C} = \frac{\sin\delta\sin\lambda_1}{\sin\delta_1\sin\lambda}.$$

Denken wir uns jetzt durch CR eine Ebene gelegt, welche parallel der yz-Ebene des Coordinatensystems ist, so möge Figur 4 die Projection dieser Ebene auf die yz-Ebene darstellen. Aus dieser Figur ergiebt sich

$$\frac{RC}{R_1C} = \frac{y_3 - b}{y_4 - b} = \frac{z_3 - c}{z_4 - c}.$$

Setzen wir diese Worte für $\frac{RC}{R_1C}$ in die vorige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{y_3 - b}{y_4 - b} = \frac{\sin\delta\sin\lambda_1}{\sin\delta_1\sin\lambda}, \qquad \frac{z_3 - c}{z_4 - c} = \frac{\sin\delta\sin\lambda_1}{\sin\delta_1\sin\lambda}.$$

Es ist nun $\frac{\sin\delta}{\sin\delta_1} = n$, und da λ und λ_1 nahezu rechte Winkel sind, so können wir $\frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda} = 1$ setzen; mithin erhalten wir

$$y_3 - b = n(y_4 - b), \qquad z_3 - c = n(z_4 - c).$$

Setzen wir in die erste dieser Gleichungen die oben für y_3 und y_4 angegebenen Werthe ein, so erhalten wir

$$\frac{\eta(x_0 - a - r) + y_0 r}{x_0 - a} - b = n\left(\frac{\eta(x_1 - a - r) + y_1 r}{x_1 - a} - b\right)$$

oder

$$y_0(x_1 - a)r + \eta\{(x_0 - a - r)(x_1 - a) - n(x_1 - a - r)(x_0 - a)\} - y_1(x_0 - a)rn = b(x_0 - a)(x_1 - a)(1 - n);$$

ebenso finden wir:

$$z_0(x_1 - a)r + \zeta\{(x_0 - a - r)(x_1 - a) - n(x_1 - a - r)(x_0 - a)\} - z_1(x_0 - a)rn = c(x_0 - a)(x_1 - a)(1 - n).$$

Wir hatten vorhin gefunden:

$$(x_1 - a)(x_0 - a - r) = n(x_0 - a)(x_1 - a - r),$$

d. h. der Coefficient von η und ζ in den beiden vorigen Gleichungen ist gleich Null, mithin erhalten wir die Beziehungen:

$$y_0(x_1 - a)r - y_1(x_0 - a)rn = b(x_0 - a)(x_1 - a)(1 - n),$$

$$z_0(x_1 - a)r - z_1(x_0 - a)rn = c(x_0 - a)(x_1 - a)(1 - n),$$

oder

$$-\frac{r}{n-1}\cdot\frac{y_0}{x_0 - a} + \frac{nr}{n-1}\cdot\frac{y_1}{x_1 - a} = b, \quad -\frac{r}{n-1}\cdot\frac{z_0}{x_0 - a} + \frac{nr}{n-1}\cdot\frac{z_1}{x_1 - a} = c,$$

oder

$$f\cdot\frac{y_0}{x_0 - a} + \varphi\frac{y_1}{x_1 - a} = b, \quad f\frac{z_0}{x_0 - a} + \varphi\frac{z_1}{x_1 - a} = c.$$

Die Beziehungen zwischen den Coordinaten des leuchtenden Punktes und seines Bildpunktes lauten also:

$$(2) \ldots \begin{cases} \dfrac{f}{x_0 - a} + \dfrac{\varphi}{x_1 - a} = 1, \\ f\dfrac{y_0}{x_0 - a} + \varphi\dfrac{y_1}{x_1 - a} = b, \\ f\dfrac{z_0}{x_0 - a} + \varphi\dfrac{z_1}{x_1 - a} = c. \end{cases}$$

§ 4. Ableitung der Gleichungen eines eintretenden und des dazu gehörenden austretenden Lichtstrahls.

Wir nehmen jetzt an, dass vor der brechenden Fläche ein zweiter leuchtender Punkt liegt mit den Coordinaten $x_0^1 y_0^1 z_0^1$; sein Bildpunkt hinter der brechenden Fläche habe die Coordinaten $x_1^1 y_1^1 z_1^1$. Genau wie vorhin werden dann zwischen den Coordinaten des Object- und Bildpunktes die Beziehungen bestehen:

$$(3)\ \ldots\ \begin{cases} \dfrac{f}{x_0^1-a}+\dfrac{\varphi}{x_0^1-a}=1\,, \\ f\dfrac{y_0^1}{x_0^1-a}+\varphi\dfrac{y_1^1}{x_1^1-a}=b\,, \\ f\dfrac{z_0^1}{x_0^1-a}+\varphi\dfrac{z_1^1}{x_1^1-a}=c. \end{cases}$$

Ein Lichtstrahl, der durch die beiden leuchtenden Punkte vor der brechenden Fläche geht, geht nach der Brechung durch die beiden Bildpunkte. Die Gleichungen des eintretenden Lichtstrahls werden dann sein:

$$y=x\frac{y_0-y_0^1}{x_0-x_0^1}+\frac{x_0y_0^1-x_0^1y_0}{x_0-x_0^1},\quad z=x\frac{z_0-z_0^1}{x_0-x_0^1}+\frac{x_0z_0^1-x_0^1z_0}{x_0-x_0^1},$$

die Gleichungen des austretenden Lichtstrahls

$$y=x\frac{y_1-y_1^1}{x_1-x_1^1}+\frac{x_1y_1^1-x_1^1y_1}{x_1-x_1^1},\quad z=x\frac{z_1-z_1^1}{x_1-x_1^1}+\frac{x_1z_1^1-x_1^1z_1}{x_1-x_1^1}.$$

§ 5. Beziehungen zwischen den Constanten der Gleichungen des eintretenden nnd des austretenden Lichtstrahls.

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergiebt sich:

$$(4)\ \ldots\ \begin{cases} x_1=\varphi+a-\dfrac{f\varphi}{f+a-x_0}, & x_1^1=\varphi+a-\dfrac{f\varphi}{f+a-x_0^1}, \\ y_1=\left(b-y_0\dfrac{f}{x_0-a}\right)\dfrac{x_1-a}{\varphi}, & y_1^1=\left(b-y_0^1\dfrac{f}{x_0^1-a}\right)\dfrac{x_1^1-a}{\varphi}, \\ z_1=\left(c-z_0\dfrac{f}{x_0-a}\right)\dfrac{x_1-a}{\varphi}, & z_1^1=\left(c-z_0^1\dfrac{f}{x_0^1-a}\right)\dfrac{x_1^1-a}{\varphi}, \end{cases}$$

daraus folgt:

$$\frac{y_1-y_1^1}{x_1-x_1^1}=\frac{\left(b-y_0\dfrac{f}{x_0-a}\right)\dfrac{x_1-a}{\varphi}-\left(b-y_0^1\dfrac{f}{x_0^1-a}\right)\dfrac{x_1^1-a}{\varphi}}{\left(\varphi+a-\dfrac{f\varphi}{f+a-x_0}\right)-\left(\varphi+a-\dfrac{f\varphi}{f+a-x_0^1}\right)}.$$

Nach den Gleichungen (4) ist

$$\frac{x_1 - a}{\varphi} = \frac{a - x_0}{f + a - x_0}, \qquad \frac{x_1^1 - a}{\varphi} = \frac{a - x_0^1}{f + a - x_0^1}.$$

Setzen wir diese beiden Werthe in die vorige Gleichung ein, so ergiebt sich:

$$\frac{y_1 - y_1^1}{x_1 - x_1^1} = \frac{\left(b - y_0 \frac{f}{x_0 - a}\right)\frac{a - x_0}{f + a - x_0} - \left(b - y_0^1 \frac{f}{x_0^1 - a}\right)\frac{a - x_0^1}{f + a - x_0^1}}{\left(\varphi + a - \frac{f\varphi}{f + a - x_0}\right) - \left(\varphi + a - \frac{f\varphi}{f + a - x_0^1}\right)}$$

oder

$$\frac{y_1 - y_1^1}{x_1 - x_1^1} = \frac{b(x_0^1 - x_0) - (f + a)(y_0^1 - y_0) + x_0 y_0^1 - x_0^1 y_0}{\varphi(x_0^1 - x_0)}$$

oder

$$(5\,a) \quad \ldots \quad \frac{y_1 - y_1^1}{x_1 - x_1^1} = \frac{b}{\varphi} - \frac{f + a}{\varphi} \cdot \frac{y_0 - y_0^1}{x_0 - x_0^1} - \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{x_0 y_0^1 - x_0^1 y_0}{x_0 - x_0^1},$$

ebenso finden wir:

$$(5\,b) \quad \ldots \quad \frac{z_1 - z_1^1}{x_1 - x_1^1} = \frac{c}{\varphi} - \frac{f + a}{\varphi} \cdot \frac{z_0 - z_0^1}{x_0 - x_0^1} - \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{x_0 z_0^1 - x_0^1 z_0}{x_0 - x_0^1}.$$

Nach den Gleichungen (4) ist ferner

$$\frac{x_1 y_1^1 - x_1^1 y}{x_1 - x_1^1} = \frac{\left(\varphi + a - f + \frac{f\varphi}{a - x_0}\right)\left(b - y_0^1 \frac{f}{x_0^1 - a}\right)\frac{x_1^1 - a}{\varphi}}{\left(\varphi + a - \frac{f\varphi}{f + a - x_0}\right) - \left(\varphi + a - \frac{f\varphi}{f + a - x_0^1}\right)}$$

$$- \frac{\left(\varphi + a - \frac{f\varphi}{f + a - x_0^1}\right)\left(b - y_0 \frac{f}{x_0 - a}\right)\frac{x_1 - a}{\varphi}}{\left(\varphi + a - \frac{f\varphi}{f + a - x_0}\right) - \left(\varphi + a - \frac{f\varphi}{f + a - x_0^1}\right)}.$$

Wir setzen wieder

$$\frac{x_1 - a}{\varphi} = \frac{a - x_0}{f + a - x_0}, \qquad \frac{x_1 - a}{\varphi} = \frac{a - x_0^1}{f + a - x_0^1}$$

dann ist

$$\frac{x_1 y_1^1 - x_1^1 y_1}{x_1 - x_1^1} = \frac{\{(\varphi + a)(f + a - x_0) - f\varphi\}\{y_0^1 f - b(x_0^1 - a)\}}{f\varphi(x_0^1 - x_0)}$$
$$- \frac{\{(\varphi + a)(f + a - x_0^1) - f\varphi\}\{y_0 f - b(x_0 - a)\}}{f\varphi(x_0^1 - x_0)}$$

oder

$$(6a) \quad \frac{x_1 y_1^1 - x_1^1 y_1}{x_1 - x_1^1} = \frac{y_0 - y_0^1}{x_0 - x_0^1} \cdot \frac{a(f + \varphi + a)}{\varphi} + \frac{x_0 y_0^1 - x_0^1 y_0}{x_0 - x_0^1} \cdot \frac{\varphi + a}{\varphi} - \frac{ab}{\varphi},$$

ebenso ist

$$(6b) \quad \frac{x_1 z_1^1 - x_1^1 z_1}{x_1 - x_1^1} = \frac{z_0 - z_0^1}{x_0 - x_0^1} \cdot \frac{a(f + \varphi + a)}{\varphi} + \frac{x_0 z_0^1 - x_0^1 z_0}{x_0 - x_0^1} \cdot \frac{\varphi + a}{\varphi} - \frac{ac}{\varphi}.$$

Setzen wir jetzt

$$\alpha = \frac{y_0 - y_0^1}{x_0 - x_0^1}, \qquad \beta = \frac{x_0 y_0^1 - x_0^1 y_0}{x_0 - x_0^1},$$

$$\gamma = \frac{z_0 - z_0^1}{x_0 - x_0^1}, \qquad \delta = \frac{x_0 z_0^1 - x_0^1 z_0}{x_0 - x_0^1},$$

so lauten die Gleichungen des eintretenden Lichtstrahls:

$$(7) \quad \ldots \quad y = \alpha x + \beta, \qquad z = \gamma x + \delta$$

und die Gleichungen des austretenden Strahls:

$$(8) \quad \begin{cases} y - \left\{\frac{b}{\varphi} - \frac{f + a}{\varphi}\alpha - \frac{1}{\varphi}\beta\right\} x + \left\{\frac{a(f + \varphi + a)}{\varphi}\alpha + \frac{\varphi + a}{\varphi}\beta - \frac{ab}{\varphi}\right\} \\ z - \left\{\frac{c}{\varphi} - \frac{f + a}{\varphi}\gamma - \frac{1}{\varphi}\delta\right\} x + \left\{\frac{a(f + \varphi + a)}{\varphi}\gamma + \frac{\varphi + a}{\varphi}\delta - \frac{ac}{\varphi}\right\} \end{cases}$$

oder

$$(9) \quad \ldots \quad y = \alpha_1 x + \beta_1, \qquad z = \gamma_1 x + \delta_1,$$

wenn wir setzen:

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{b}{\varphi} - \frac{f + a}{\varphi}\alpha - \frac{1}{\varphi}\beta, & \beta_1 = \frac{a(f + \varphi + a)}{\varphi}\alpha + \frac{\varphi + a}{\varphi}\beta - \frac{ab}{\varphi}, \\ \gamma_1 = \frac{c}{\varphi} - \frac{f + a}{\varphi}\gamma - \frac{1}{\varphi}\delta, & \delta_1 = \frac{a(f + \varphi + a)}{\varphi}\gamma + \frac{\varphi + a}{\varphi}\delta - \frac{ac}{\varphi}. \end{cases}$$

§ 6. Beziehungen zwischen den Constanten der Gleichungen des eintretenden und des austretenden Lichtstrahls bei drei sphärischen Flächen.

Wir nehmen jetzt an, dass uns drei brechende Flächen vorgelegt seien, deren Krümmungsmittelpunkte von einer beliebigen geraden Linie, der x-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, nur einen kleinen Abstand haben. Die Grössen $a\,b\,c\,f\,\varphi$ mögen dann in Bezug auf die erste brechende Fläche $a_1\,b_1\,c_1\,f_1\,\varphi_1$ sein, für die zweite Fläche $a_2\,b_2\,c_2\,f_2\,\varphi_2$, für die dritte Fläche $a_3\,b_3\,c_3\,f_3\,\varphi_3$. Vor der ersten brechenden Fläche befinde sich ein Lichtstrahl, dessen Gleichungen sind:

$$y = \alpha x + \beta\,, \qquad z = \gamma x + \delta\,,$$

dann lauten die Gleichungen des Lichtstrahls nach der ersten Brechung:

$$y = \alpha_1 x + \beta_1\,, \qquad z = \gamma_1 x + \delta_1\,,$$

wenn wir setzen:

$$(11)\ldots\ \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b_1}{\varphi_1} - \dfrac{f_1 + a_1}{\varphi_1}\,\alpha - \dfrac{1}{\varphi_1}\,, \\ \beta_1 = \dfrac{a_1 (f_1 + \varphi_1 + a_1)}{\varphi_1}\,\alpha + \dfrac{\varphi_1 + a_1}{\varphi_1}\,\beta - \dfrac{a_1 b_1}{\varphi_1}\,, \\ \gamma_1 = \dfrac{c_1}{\varphi_1} - \dfrac{f_1 + a_1}{\varphi_1}\,\gamma - \dfrac{1}{\varphi_1}\,, \\ \delta_1 = \dfrac{a_1 (f_1 + \varphi_1 + a_1)}{\varphi_1}\,\gamma + \dfrac{\varphi_1 + a_1}{\varphi_1}\,\delta - \dfrac{a_1 c_1}{\varphi_1}\,. \end{cases}$$

Sind die Gleichungen eines Lichtstrahls vor der zweiten brechenden Fläche:

$$y = \alpha_1 x + \beta_1\,, \qquad z = \gamma_1 x + \delta_1\,,$$

so nehmen die Gleichungen des Lichtstrahls nach der zweiten Brechung die Form an:

$$y = \alpha_2 x + \beta_2\,, \qquad z = \gamma_2 x + \delta_2\,,$$

wenn wir setzen:

$$(12)\ \ldots\ \begin{cases} \alpha_2 = \dfrac{b_2}{\varphi_2} - \dfrac{f_2 + a_2}{\varphi_2}\alpha_1 - \dfrac{1}{\varphi_2}\beta_1\,, \\ \beta_2 = \dfrac{a_2(f_2 + \varphi_2 + a_2)}{\varphi_2}\alpha_1 + \dfrac{\varphi_2 + a_2}{\varphi_2}\beta_1 - \dfrac{a_2 b_2}{\varphi_2}\,, \\ \gamma_2 = \dfrac{c_2}{\varphi_2} - \dfrac{f_2 + a_2}{\varphi_2}\gamma_1 - \dfrac{1}{\varphi_2}\delta_1\,, \\ \delta_2 = \dfrac{a_2(f_2 + \varphi_2 + a_2)}{\varphi_2}\gamma_1 + \dfrac{\varphi_2 + a_2}{\varphi_2}\delta_1 - \dfrac{a_2 c_2}{\varphi_2}\,. \end{cases}$$

Geht jetzt der Lichtstrahl durch eine dritte brechende Fläche, so werden die Gleichungen nach der dritten Brechung lauten:

$$y = \alpha_3 x + \beta_3\,, \qquad z = \gamma_3 x + \delta_3\,,$$

und dabei ist:

$$(13)\ \ldots\ \begin{cases} \alpha_3 = \dfrac{b_3}{\varphi_3} - \dfrac{f_3 + a_3}{\varphi_3}\alpha_2 - \dfrac{1}{\varphi_3}\beta_2\,, \\ \beta_3 = \dfrac{a_3(f_3 + \varphi_3 + a_3)}{\varphi_3}\alpha_2 + \dfrac{\varphi_3 + a_3}{\varphi_3}\beta_2 - \dfrac{a_3 b_3}{\varphi_3}\,, \\ \gamma_3 = \dfrac{c_3}{\varphi_3} - \dfrac{f_3 + a_3}{\varphi_3}\gamma_2 - \dfrac{1}{\varphi_3}\delta_2\,, \\ \delta_3 = \dfrac{a_3(f_3 + \varphi_3 + a_3)}{\varphi_3}\gamma_2 + \dfrac{\varphi_3 + a_3}{\varphi_3}\delta_2 - \dfrac{a_3 c_3}{\varphi_3}\,. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\frac{f_1 + a_1}{\varphi_1} = g_1\,, \quad \frac{f_2 + a_2}{\varphi_2} = g_2\,, \quad \frac{f_3 + a_3}{\varphi_3} = g_3\,,$$

$$\frac{\varphi_1 + a_1}{\varphi_1} = h_1\,, \quad \frac{\varphi_2 + a_2}{\varphi_2} = h_2\,, \quad \frac{\varphi_3 + a_3}{\varphi_3} = h_3\,,$$

$$\frac{a_1(f_1 + \varphi_1 + a_1)}{\varphi_1} = k_1\,, \quad \frac{a_2(f_2 + \varphi_2 + a_2)}{\varphi_2} = k_2\,,$$

$$\frac{a_3(f_3 + \varphi_3 + a_3)}{\varphi_3} = k_3\,,$$

dann ergiebt sich aus (11) (12) (13)

$$(14)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b_1}{\varphi_1} - g_1\alpha - \dfrac{1}{\varphi_1}\beta\,, & \gamma_1 = \dfrac{c_1}{\varphi_1} - g_1\gamma - \dfrac{1}{\varphi_1}\delta\,, \\ \beta_1 = -\dfrac{a_1 b_1}{\varphi_1} + k_1\alpha + h_1\beta\,, & \delta_1 = -\dfrac{a_1 c_1}{\varphi_1} + k_1\gamma + h_1\delta\,, \\ \alpha_2 = \dfrac{b_2}{\varphi_2} - g_2\alpha_1 - \dfrac{1}{\varphi_2}\beta_1\,, & \gamma_2 = \dfrac{c_2}{\varphi_2} - g_2\gamma_1 - \dfrac{1}{\varphi_2}\delta_1\,, \\ \beta_2 = -\dfrac{a_1 b_1}{\varphi_2} + k_2\alpha_1 + h_2\beta_1\,, & \delta_2 = -\dfrac{a_2 c_2}{\varphi_2} + k_2\gamma_1 + h_2\delta_1\,, \\ \alpha_3 = \dfrac{b_3}{\varphi_3} - g_3\alpha_2 - \dfrac{1}{\varphi_3}\beta_2\,, & \gamma_3 = \dfrac{c_3}{\varphi_3} - g_3\gamma_2 - \dfrac{1}{\varphi_3}\delta_2\,, \\ \beta_3 = -\dfrac{a_3 b_3}{\varphi_3} + k_3\alpha_2 + h_3\beta_2\,, & \delta_3 = -\dfrac{a_3 c_3}{\varphi_3} + k_3\gamma_2 + h_3\delta_2\,. \end{cases}$$

Das erste dieser beiden Gleichungssysteme können wir schreiben:

$$(15)\quad \begin{cases} \alpha_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = \dfrac{b_1}{\varphi_1} - g_1\alpha - \dfrac{1}{\varphi_1}\beta\,, \\ 0 + \beta_1 + 0 + 0 + 0 + 0 = -\dfrac{a_1 b_1}{\varphi_1} + k_1\alpha + h_1\beta\,, \\ g_2\alpha_1 + \dfrac{1}{\varphi_2}\beta_1 + \alpha_2 + 0 + 0 + 0 = \dfrac{b_2}{\varphi_2}\,, \\ -k_2\alpha_1 - h_2\beta_1 + 0 + \beta_2 + 0 + 0 = -\dfrac{a_2 b_2}{\varphi_2}\,, \\ 0 + 0 + g_3\alpha_2 + \dfrac{1}{\varphi_3}\beta_2 + \alpha_3 + 0 = \dfrac{b_3}{\varphi_3}\,, \\ 0 + 0 - k_3\alpha_2 - h_3\beta_2 + 0 + \beta_3 = -\dfrac{a_3 b_3}{\varphi_3}\,. \end{cases}$$

Aus diesem Gleichungssystem ergiebt sich:

$$\beta_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_1}{\varphi_1} - g_1\alpha - \frac{1}{\varphi_1}\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} + k_1\alpha + h_1\beta \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & 0 & \frac{b_2}{\varphi_2} \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 1 & \frac{b_3}{\varphi_3} \\ 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & 0 & -\frac{a_3 b_3}{\varphi_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Die Determinante der Coefficienten, welche im Nenner steht, ist der Einheit gleich, wie sofort ersichtlich, wenn wir sie in Unterdeterminanten nach der ersten Horizontalreihe zerlegen und die Unterdeterminante in derselben Weise zerlegen u. s. f. Wir können die Determinante im Zähler schreiben:

$$\beta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_1}{\varphi_1} - g_1\alpha - \frac{1}{\varphi}\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} + k_1\alpha + h_1\beta \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & 0 & \frac{b_2}{\varphi_2} + 0 \quad + 0 \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} + 0 \quad + 0 \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 1 & \frac{b_3}{\varphi_3} + 0 \quad + 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & 0 & -\frac{a_3 b_3}{\varphi_3} + 0 \quad + 0 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante können wir in drei zerlegen:

$$\beta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_1}{\varphi_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & 0 & \frac{b_2}{\varphi_2} \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 1 & \frac{b_3}{\varphi_3} \\ 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & 0 & -\frac{a_3 b_3}{\varphi_3} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_1\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_1\alpha \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varphi_1}\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & h_1\beta \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese drei Determinanten können wir schreiben:

$$\beta_3 = -\begin{vmatrix} \frac{b_1}{\varphi_1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_2}{\varphi_2} & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{b_3}{\varphi_3} & 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 1 \\ -\frac{a_3 b_3}{\varphi_3} & 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\alpha \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \frac{1}{\varphi_1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn wir jede Determinante nach der letzten Verticalreihe in Unterdeterminanten auflösen, so ist:

$$\beta_3 = \begin{vmatrix} \frac{b_1}{\varphi_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{b_2}{\varphi_2} & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 \\ -\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3 b_3}{\varphi_3} & 0 & 0 & -k_3 & -h_3 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & -h_3 \end{vmatrix}$$

$$-\beta\begin{vmatrix} \frac{1}{\varphi_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & -h_3 \end{vmatrix}.$$

In der ersten dieser drei Determinanten wollen wir die zweite Horizontalreihe mit der ersten und die vierte mit der dritten vertauschen, darauf die dritte Verticalreihe mit der zweiten und die fünfte mit der vierten; wir erhalten dann:

$$\beta_3 = \begin{vmatrix} -\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_1}{\varphi_1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} & -h_2 & -k_2 & 1 & 0 \\ \frac{b_2}{\varphi_2} & \frac{1}{\varphi_2} & g_2 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3 b_3}{\varphi_3} & 0 & 0 & -h_3 & -k_3 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_1} & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & -h_3 \end{vmatrix}$$

$$-\beta\begin{vmatrix} \frac{1}{\varphi_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir die erste Determinante mit p, die zweite mit s, die dritte mit t, so ist:

$$(16\,a) \quad \ldots \quad \beta_3 = p - \alpha s - \beta t.$$

In derselben Weise finden wir aus dem zweiten Gleichungssystem von (14)

$$(16\,b) \quad \ldots \quad \delta_3 = \pi - \gamma s - \delta t\,,$$

wo π eine Determinante von der Form p bedeutet, in welcher an Stelle der Grössen $b_1\, b_2\, b_3$ die Grössen $c_1\, c_2\, c_3$ gesetzt sind.

Aus dem Gleichungssystem (15) ergiebt sich ferner:

$$\alpha_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_1}{\varphi_1} - g_1\alpha - \frac{1}{\varphi_1}\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} + k_1\alpha + h_1\beta & 0 \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & \frac{b_2}{\varphi_2} & 0 \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & -\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & \frac{b_3}{\varphi_3} & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & -\frac{a_3 b_3}{\varphi_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante der Coefficienten ist der Einheit gleich. Wir zerlegen diese Determinante in drei, dann ist:

$$\alpha_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_1}{\varphi_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a_1 b_1}{\varphi_1} & 0 \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & \frac{b_2}{\varphi_2} & 0 \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & -\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & \frac{b_3}{\varphi_3} & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & -\frac{a_3 b_3}{\varphi_3} & 1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -g_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & k_1 & 0 \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\beta\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varphi_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & h_1 & 0 \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & -h_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wenn wir die drei Determinanten nach der letzten Verticalreihe in Unterdeterminanten zerlegen, so ist:

$$\alpha_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_1}{\varphi_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & \frac{b_2}{\varphi_2} \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & -\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & \frac{b_3}{\varphi_3} \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} \end{vmatrix}$$

$$-\beta\begin{vmatrix} \frac{1}{\varphi_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir die erste Determinante mit p_1, die zweite mit s_1 und die dritte mit t_1, so ist:

$$(17\,a) \quad \ldots \quad \alpha_3 = p_1 - \alpha s_1 - \beta t_1 .$$

Ebenso finden wir aus dem zweiten Gleichungssystem von (14)

$$(17\,b) \quad \ldots \quad \gamma_3 = \pi_1 - \gamma s_1 - \delta t_1 ,$$

wo π_1 eine Determinante von der Form p_1 bedeutet, in welcher an Stelle der Grössen $b_1 b_2 b_3$ die Grössen $c_1 c_2 c_3$ gesetzt sind.

§ 7. Aufstellung der Gleichungen eines Lichtstrahls, welcher ungebrochen durch das System geht.

Die Gleichungen des eintretenden Lichtstrahls waren:

$$y = \alpha x + \beta , \qquad z = \gamma x + \delta ;$$

die Gleichungen des austretenden Lichtstrahls:

$$y = \alpha_3 x + \beta_3 , \qquad z = \gamma_3 x + \delta_3 .$$

Liegt der eintretende und der austretende Lichtstrahl in einer geraden Linie, d. h. geht ein Lichtstrahl ungebrochen durch das System, so muss sein:

$$\alpha_3 = \alpha , \quad \beta_3 = \beta , \quad \gamma_3 = \gamma , \quad \delta_3 = \delta .$$

Es ist dann nach Gleichungen (16a) und (17a):

$$\alpha = \frac{p - \beta(1+t)}{s} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{p_1 - \beta t_1}{1+s} ,$$

mithin ist:

$$(p_1 - \beta t_1)\, s = \{p - (1+t)\}(1+s_1),$$

daraus folgt:

$$(18\,a) \quad \ldots \quad \beta = \frac{p(1+s_1) - p_1 s}{(1+t)(1+s_1) - s t_1} ;$$

ebenso erhalten wir:

$$(18\,b) \quad \ldots \quad \delta = \frac{\pi(1+s_1) - \pi_1 s}{(1+t)(1+s_1) - s t_1} .$$

Nach den Gleichungen (17a) und (16a) ist für $\alpha_3 = \alpha$ und $\beta_3 = \beta$:

$$\beta = \frac{p_1 - \alpha(1+s_1)}{t_1} \quad \text{und} \quad \beta + \frac{p - \alpha s}{1+t},$$

mithin ist:

$$\{p_1 - \alpha(1+s_1)\}(1+t) = t_1(p + \alpha s),$$

daraus folgt:

$$(19a) \ldots\ \alpha = \frac{p_1(1+t) - p t_1}{(1+t)(1+s_1) - s t_1};$$

ebenso erhalten wir:

$$(19b) \ldots\ \gamma = \frac{\pi_1(1+t) - \pi t_1}{(1+t)(1+s_1) - s t_1}.$$

Die Gleichungen eines Lichtstrahls, welcher ungebrochen durch das System hindurchgeht, lauten also:

$$(20) \begin{cases} y = x \dfrac{p_1(1+t) - p t_1}{(1+t)(1+s_1) - s t_1} + \dfrac{p(1+s_1) - p_1 s}{(1+t)(1+s_1) - s t_1}, \\ z = x \dfrac{\pi_1(1+t) - \pi t_1}{(1+t)(1+s_1) - s t_1} + \dfrac{\pi(1+s_1) - \pi s}{(1+t)(1+s_1) - s t_1}. \end{cases}$$

Wir wollen diese Linie die Cardinale des dioptrischen Systems nennen und noch nachweisen, dass auf dieser Linie die Hauptbrennpunkte und die Knotenpunkte des Systems liegen, dass sie also identisch ist mit der Casoratischen Cardinale. Die Definition der Hauptbrennpunkte soll für innerhalb der Gauss'schen Beschränkungen nicht centrirte Systeme sein: Alle parallel mit der Cardinale austretende Strahlen kommen von einem leuchtenden Punkt vor dem System, welcher der vordere Hauptbrennpunkt ist, alle parallel mit der Cardinale eintretende Strahlen gehen nach der Brechung durch einen festen Punkt, welcher der hintere Hauptbrennpunkt ist. Die Definition der Knotenpunkte bleibt die bekannte: Wenn ein Lichtstrahl so in ein System eintritt, dass er gegen den ersten Knotenpunkt gerichtet ist, so tritt er in paralleler Richtung aus, als wenn er aus dem zweiten Knotenpunkt kommt.

§ 8. Die Coordinaten der Hauptbrennpunkte.

Die Beziehungen zwischen den Constanten der Gleichungen des austretenden und des eintretenden Lichtstrahls waren nach den Gleichungen (16) und (17):

$$(21)\ \ldots\ \begin{cases} \alpha_3 = p_1 - \alpha s_1 - \beta t_1\,, & \gamma_3 = \pi_1 - \gamma s_1 - \delta t_1\,, \\ \beta_3 = p - \alpha s - \beta t\,, & \delta_3 = \pi - \gamma s - \delta t\,. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\frac{\alpha_3 - p_1 + \alpha s_1}{t_1} = -\beta\,, \qquad \frac{\beta_3 - p + \alpha s_1}{t} = -\beta\,,$$

also ist:

$$(\alpha_3 - p_1 + \alpha s_1)\, t = (\beta_3 - p + \alpha s)\, t_1\,,$$

daraus folgt:

$$(22a)\ \ldots\ \alpha = \frac{\alpha_3 t - \beta_3 t_1 + p t_1 - p_1 t}{s t_1 - s_1 t}\,,$$

ebenso erhalten wir:

$$(22b)\ \ldots\ \beta = \frac{\alpha_3 s - \beta_3 s_1 + p s_1 - p_1 s}{s_1 t - s t_1}\,,$$

$$(22c)\ \ldots\ \gamma = \frac{\gamma_3 t - \delta_3 t_1 + \pi t_1 - \pi_1 t}{s t_1 - s_1 t}\,,$$

$$(22d)\ \ldots\ \delta = \frac{\gamma_3 s - \delta_3 s_1 + \pi s_1 - \pi_1 s}{s_1 t - s t_1}\,.$$

Die Gleichungen des austretenden Strahls waren:

$$y = \alpha_3 x + \beta_3\,, \qquad z = \gamma_3 x + \delta_3\,.$$

Soll dieser Strahl parallel der Cardinale sein, so müssen die Coefficienten von x in den Gleichungen des Strahls und der Cardinale einander gleich sein, also:

$$\alpha_3 = \frac{p_1(1+t) - p t_1}{(1+t)(1+s_1) - s t_1}\,, \qquad \gamma_3 = \frac{\pi_1(1+t) - \pi t_1}{(1+t)(1+s_1) - s t_1}\,.$$

Nach den Gleichungen (21) gelten dann für die Constanten des eintretenden Strahls die Beziehungen:

$$p_1 - \alpha s_1 - \beta t_1 = \frac{p_1(1+t) - p t_1}{(1+t)(1+s_1) - s t_1},$$

$$\pi_1 - \gamma s_1 - \delta t_1 = \frac{\pi_1(1+t) - \pi t_1}{(1+t)(1+s_1) - s t_1},$$

daraus folgt:

$$\beta = -\alpha \frac{s_1}{t_1} + \left(\frac{p_1}{t_1} - \frac{p_1(1+t) - p t_1}{\{(1+t)(1+s_1) - s t_1\} t_1} \right),$$

$$\delta = -\gamma \frac{s_1}{t_1} + \left(\frac{\pi_1}{t_1} - \frac{\pi_1(1+t) - \pi t_1}{\{(1+t)(1+s_1) - s t_1\} t_1} \right).$$

Setzen wir diese Werte für β und δ in die Gleichungen des eintretenden Lichtstrahls ein, so nehmen dieselben die Form an:

$$y = \alpha x - \alpha \frac{s_1}{t_1} + \left(\frac{p_1}{t_1} - \frac{p_1(1+t) - p t_1}{\{(1+t)(1+s_1) - s t_1\} t_1} \right),$$

$$z = \gamma x - \gamma \frac{s_1}{t_1} + \left(\frac{\pi_1}{t_1} - \frac{\pi_1(1+t) - \pi t_1}{\{(1+t)(1+s_1) - s t_1\} t_1} \right),$$

oder

$$y - \left(\frac{p_1}{t_1} - \frac{p_1(1+t) - p t_1}{\{(1+t)(1+s_1) - s t_1\} t_1} \right) = \alpha \left(x - \frac{s_1}{t_1} \right),$$

$$z - \left(\frac{\pi_1}{t_1} - \frac{\pi_1(1+t) - \pi t_1}{\{(1+t)(1+s_1) - s t_1\} t_1} \right) = \gamma \left(x - \frac{s_1}{t_1} \right).$$

Dies sind die Gleichungen einer geraden Linie, die durch den festen Punkt F geht, dessen Coordinaten lauten:

$$(23) \ldots \begin{cases} F_x = \dfrac{s_1}{t_1}, \quad F_y = \dfrac{p_1}{t_1} - \dfrac{p_1(1+t) - p t_1}{\{(1+t)(1+s_1) - s t_1\} t_1}, \\ F_z = \dfrac{\pi_1}{t_1} - \dfrac{\pi_1(1+t) - \pi t_1}{\{(1+t)(1+s_1) - s t_1\} t_1}. \end{cases}$$

Die Gleichungen des eintretenden Lichtstrahls waren:

$$y = \alpha x + \beta, \qquad z = \gamma x + \delta.$$

Soll dieser Strahl parallel der Cardinale sein, so müssen die Coefficienten von x in den Gleichungen des Strahls und der Cardinale einander gleich sein, also:

$$\alpha = \frac{p_1(1+t) - p\,t_1}{(1+t)(1+s_1) - s\,t_1}, \qquad \gamma = \frac{\pi_1(1+t) - \pi\,t_1}{(1+t)(1+s_1) - s\,t_1}.$$

Dann gelten nach den Gleichungen (22) für die Constanten des austretenden Strahls die Beziehungen:

$$\frac{\alpha_3 t - \beta_3 t_1 + p\,t_1 - p_1 t}{s\,t_1 - s_1 t} = \frac{p_1(1+t) - p\,t_1}{(1+t)(1+s_1) - s\,t_1},$$

$$\frac{\gamma_3 t - \delta_3 t_1 + \pi\,t_1 - \pi_1 t}{s\,t_1 - s_1 t} = \frac{\pi_1(1+t) - \pi\,t_1}{(1+t)(1+s_1) - s\,t_1},$$

daraus folgt:

$$\beta_3 = \alpha_3 \frac{t}{t_1} + \left(\frac{p\,t_1 - p_1 t}{t_1} - \frac{(s\,t_1 - s_1 t)\{p_1(1+t) - p\,t_1\}}{t_1\{(1+t)(1+s_1) - s\,t_1\}} \right),$$

$$\delta_3 = \gamma_3 \frac{t}{t_1} + \left(\frac{\pi\,t_1 - \pi_1 t}{t_1} - \frac{(s\,t_1 - s_1 t)\{\pi_1(1+t) - \pi\,t_1\}}{t_1\{(1+t)(1+s_1) - s\,t_1\}} \right).$$

Setzen wir diese Werte für β_3 und δ_3 in die Gleichungen des austretenden Lichtstrahls ein, so nehmen dieselben die Form an:

$$y - \left(\frac{p\,t_1 - p_1 t}{t_1} - \frac{(s\,t_1 - s_1 t)\{p_1(1+t) - p\,t_1\}}{t_1\{(1+t)(1+s_1) - s\,t_1\}} \right) = \alpha_3 \left(x + \frac{t}{t_1} \right),$$

$$z - \left(\frac{\pi\,t_1 - \pi_1 t}{t_1} - \frac{(s\,t_1 - s_1 t)\{\pi_1(1+t) - \pi\,t_1\}}{t_1\{(1+t)(1+s_1) - s\,t_1\}} \right) = \gamma_3 \left(x + \frac{t}{t_1} \right).$$

Dies sind die Gleichungen einer geraden Linie, die durch den festen Punkt Φ geht, dessen Coordinaten lauten:

$$(24) \quad \begin{cases} \Phi_x = -\frac{t}{t_1}, \quad \Phi_y = \frac{p\,t_1 - p_1 t}{t_1} - \frac{(s\,t_1 - s_1 t)\{p_1(1+t) - p\,t_1\}}{t_1\{(1+t)(1+s_1) - s\,t_1\}}, \\ \Phi_z = \frac{\pi\,t_1 - \pi_1 t}{t_1} - \frac{(s\,t_1 - s_1 t)\{\pi_1(1+t) - \pi\,t_1\}}{t_1\{(1+t)(1+s_1) - s\,t_1\}}. \end{cases}$$

Setzen wir die Coordinaten der Punkte F und Φ in die Gleichungen der Cardinale ein, so genügen sie denselben, d. h. die Hauptbrennpunkte liegen auf der Cardinale.

§ 9. Die Coordinaten der Knotenpunkte.

Sind der eintretende und der austretende Strahl parallel, so ist $\alpha_3 = \alpha$ und $\gamma_3 = \gamma$, mithin ist nach den Gleichungen (21):

$$\alpha = p_1 - \alpha s_1 - \beta t_1, \qquad \gamma = \pi_1 - \gamma s_1 - \delta t_1,$$

oder:

$$\beta = \frac{p_1 - \alpha(1 + s_1)}{t_1}, \qquad \delta = \frac{\pi_1 - \gamma(1 + s_1)}{t_1}.$$

Setzen wir diese beiden Werte in die Gleichungen des eintretenden Strahls ein, so nehmen dieselben die Form an:

$$y = \alpha x + \frac{p_1 - \alpha(1 + s_1)}{t_1}, \qquad z = \gamma x + \frac{\pi_1 - \gamma(1 + s_1)}{t_1},$$

oder:

$$y - \frac{p_1}{t_1} = \alpha\left(x - \frac{1 + s_1}{t_1}\right), \qquad z - \frac{\pi_1}{t_1} = \gamma\left(x - \frac{1 + s_1}{t_1}\right).$$

Dies sind die Gleichungen einer geraden Linie, die durch den festen Punkt K geht, dessen Coordinaten sind:

$$(25) \ldots K_x = \frac{1 + s_1}{t_1}, \qquad K_y = \frac{p_1}{t_1}, \qquad K_z = \frac{\pi_1}{t_1}.$$

Setzen wir umgekehrt $\alpha = \alpha_3$ und $\gamma = \gamma_3$, so ist nach den Gleichungen (22):

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_3 t - \beta_3 t_1 + p t_1 - p_1 t}{s t_1 - s_1 t}, \qquad \gamma_3 = \frac{\gamma_3 t - \delta_3 t_1 + \pi t_1 - \pi_1 t}{s t_1 - s_1 t},$$

also ist:

$$\beta_3 = \frac{p t_1 - p_1 t - \alpha_3(s t_1 - s_1 t - t)}{t_1}, \qquad \delta_3 = \frac{\pi t_1 - \pi_1 t - \gamma_3(s t_1 - s_1 t - t)}{t_1}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen des austretenden Strahls ein, so nehmen dieselben die Form an:

$$y = \alpha_3 x - \alpha_3 \frac{s t_1 - s_1 t - t}{t_1} + \frac{p t_1 - p_1 t}{t_1},$$

$$z = \gamma_3 x - \gamma_3 \frac{s t_1 - s_1 t - t}{t_1} + \frac{\pi t_1 - \pi_1 t}{t_1},$$

oder:

$$y - \frac{p t_1 - p_1 t}{t_1} = \alpha_3 \left(x - \frac{s t_1 - s_1 t - t}{t_1} \right),$$

$$z - \frac{\pi t_1 - \pi_1 t}{t_1} = \gamma_3 \left(x - \frac{s t_1 - s_1 t - t}{t_1} \right).$$

Dies sind die Gleichungen einer geraden Linie, welche durch den festen Punkt K_1 geht und dessen Coordinaten sind:

$$(26)\quad K_x^1 = \frac{s t_1 - s_1 t - t}{t_1}, \quad K_y^1 = \frac{p t_1 - p_1 t}{t_1}, \quad K_z^1 = \frac{\pi t_1 - \pi_1 t}{t_1}.$$

Wenn wir die Coordinaten der Punkte K und K_1 in die Gleichungen der Cardinale einsetzen, so genügen sie denselben, d. h. die Knotenpunkte liegen auf der Cardinale.

§ 10. Beziehungen zwischen den Constanten der Gleichungen eines eintretenden und des austretenden Strahls für u brechende Flächen.

Wir haben bis jetzt das Problem nur für drei brechende Flächen gelöst, es ist aber leicht, dasselbe für eine beliebige Anzahl von Flächen auszuführen. Fahren wir in den Operationen, wie auf Seite 14 angegeben ist, fort, bis der Lichtstrahl durch u brechende Flächen hindurchgegangen ist, so erhalten wir als Beziehungen zwischen den Constanten $\alpha\ \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_{u-1}\ \alpha_u$ und $\beta\ \beta_1 \beta_2\ \ldots\ \beta_{u-1}\ \beta_u$ folgendes Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\alpha_1 & +0 & +0 & +0 & +0\ +0\ \ldots\ +0 & +0 & +0\ +0 = & \frac{b_1}{\varphi_1} - g_1\alpha = \frac{1}{\varphi_1}\beta. \\
0 & +\beta_1 & +0 & +0 & +0\ +0\ \ldots\ +0 & +0 & +0\ +0 = & -\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} + k_1\alpha + h_1\beta, \\
g_2\alpha_1 & +\frac{1}{\varphi_1}\beta_1 + \alpha_2 & +0 & +0 & +0\ \ldots\ +0 & +0 & +0\ +0 & \frac{b_2}{\varphi_2}. \\
-k_2\alpha_1 & -h_2\beta_1 + 0 & +\beta_2 & +0 & +0\ \ldots\ +0 & +0 & +0\ +0 & \frac{a_2 b_2}{\varphi_2}. \\
0 & +0 & +g_3\alpha_2 + \frac{1}{\varphi_3}\beta_2 + \alpha_3 & +0 & \ldots\ +0 & +0 & +0\ +0 = & \frac{b_3}{\varphi_3}. \\
0 & +0 & -k_3\alpha_2 - h_3\beta_2 + 0 & +\beta_3 & \ldots\ +0 & +0 & +0\ +0 = & -\frac{a_3 b_3}{\varphi_3}. \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & +0 & +0 & +0 & +0\ +0\ \ldots\ +g_n\alpha_{n-1} & +\frac{1}{\varphi_n}\beta_{n-1} + \alpha_n & +0 = & \frac{b_n}{\varphi_n}. \\
0 & +0 & +0 & +0 & +0\ +0\ \ldots\ -k_n\alpha_{n-1} & -h_n\beta_{n-1} + 0 & +\beta_n = & -\frac{a_n b_n}{\varphi_n}.
\end{array}
$$

Die Determinante der Coefficienten ist der Einheit gleich. Es ergiebt sich also:

$$\beta_u = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \ldots . 0 & 0 & 0 & \left(\frac{b_1}{\varphi_1} - g_1\alpha - \frac{1}{\varphi_1}\beta\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \ldots . 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} + k_1\alpha + h_1\beta\right) \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 \ldots . 0 & 0 & 0 & \left(\frac{b_2}{\varphi_2} + 0 + 0\right) \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \ldots . 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} + 0 + 0\right) \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} \ldots . 0 & 0 & 0 & \left(\frac{b_3}{\varphi_3} + 0 + 0\right) \\ 0 & 0 & -k_3 & -h_3 \ldots 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{a_3 b_3}{\varphi_3} + 0 + 0\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots . g_u & \frac{1}{\varphi_u} & 1 & \left(\frac{b_u}{\varphi_u} + 0 + 0\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots -k_u & -h_u & 0 & \left(-\frac{a_u b_u}{\varphi_u} + 0 + 0\right) \end{vmatrix}$$

Mit dieser Determinante verfahren wir ebenso, wie mit der Determinante für β_3 auf Seite 17, dann erhalten wir:

$$\beta_u = p - \alpha s - \beta t$$

und dabei ist jetzt:

$$p = \begin{vmatrix} -\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots . 0 & 0 \\ \frac{b_1}{\varphi_1} & 0 & 1 & 0 & 0 \ldots . 0 & 0 \\ -\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} & -h_2 & -k_2 & 1 & 0 \ldots . 0 & 0 \\ \frac{b_2}{\varphi_2} & \frac{1}{\varphi_2} & g_2 & 0 & 1 \ldots . 0 & 0 \\ -\frac{a_3 b_3}{\varphi_3} & 0 & 0 & -h_3 & -k_3 \ldots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \frac{b_{u-1}}{\varphi_{u-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots . 0 & 1 \\ -\frac{a_u b_u}{\varphi_u} & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots -h_u & -k_u \end{vmatrix},$$

$$s = \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & -h_3 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots -k_u & -h_u \end{vmatrix},$$

$$t = \begin{vmatrix} \frac{1}{\varphi_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & -h_3 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots -k_u & -h_u \end{vmatrix}.$$

Aus einem zweiten Gleichungssystem, welches die Beziehungen zwischen den Grössen $\gamma\,\gamma_1\,\gamma_2 \ldots \gamma_{u-1}\,\gamma_u$ und $\delta\,\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_{u-1}\,\delta_u$ angiebt, können wir finden:

$$\delta_u = \pi - \gamma\, s - \delta\, t,$$

wo π eine Determinante von der Form p bedeutet, in welcher an stelle der Grössen $b_1\,b_2\,b_3 \ldots b_u$ die Grössen $c_1\,c_2\,c_3 \ldots c_u$ gesetzt sind.

Ebenso, wie wir β_u und δ_u gefunden haben, finden wir:

$$\alpha_u = p_1 - \alpha s_1 - \beta t_1 ,$$
$$\gamma_u = \pi_1 - \gamma s_1 - \delta t_1 ,$$

und dabei ist jetzt:

$$p_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots . & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_1}{\varphi_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots . & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_1 b_1}{\varphi_1} \\ g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 & 0 \ldots . & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_2}{\varphi_2} \\ -k_2 & -h_2 & 0 & 1 & 0 \ldots . & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_2 b_2}{\varphi_2} \\ 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} & 1 \ldots . & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_3}{\varphi_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -k_{u-1} & -h_{u-1} & 0 & 1 & -\frac{a_{u-1} b_{u-1}}{\varphi_{u-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots . & 0 & 0 & g_u & \frac{1}{\varphi_u} & \frac{b_u}{\varphi_u} \end{vmatrix}$$

π_1 ist eine Determinante von derselben Form, wenn an Stelle der Grössen $b_1\ b_2 \ldots . b_u$ die Grössen $c_1\ c_2 \ldots . c_u$ gesetzt werden.

$$s_1 = \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots . & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \ldots . & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 \ldots . & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \ldots . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} \ldots . & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots . & g_u & \frac{1}{\varphi_u} \end{vmatrix} ,$$

$$t_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\varphi_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots . & 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \ldots . & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & \frac{1}{\varphi_2} & 1 & 0 \ldots . & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -h_2 & 0 & 1 \ldots . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_3 & \frac{1}{\varphi_3} \ldots . & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots . & g_u & \frac{1}{\varphi_u} \end{vmatrix} .$$

Hiermit haben wir jetzt das Problem allgemein gelöst, denn wir können jetzt in § 7 bis § 9 an Stelle der Grössen $\alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3\, \delta_3$ die Grössen $\alpha_u\, \beta_u\, \gamma_u\, \delta_u$ setzen, wobei dann $p\ \pi\ s\ t\ p_1\ \pi_1\ s_1\ t_1$ die Determinanten bedeuten, welche in § 10 dafür angegeben sind.

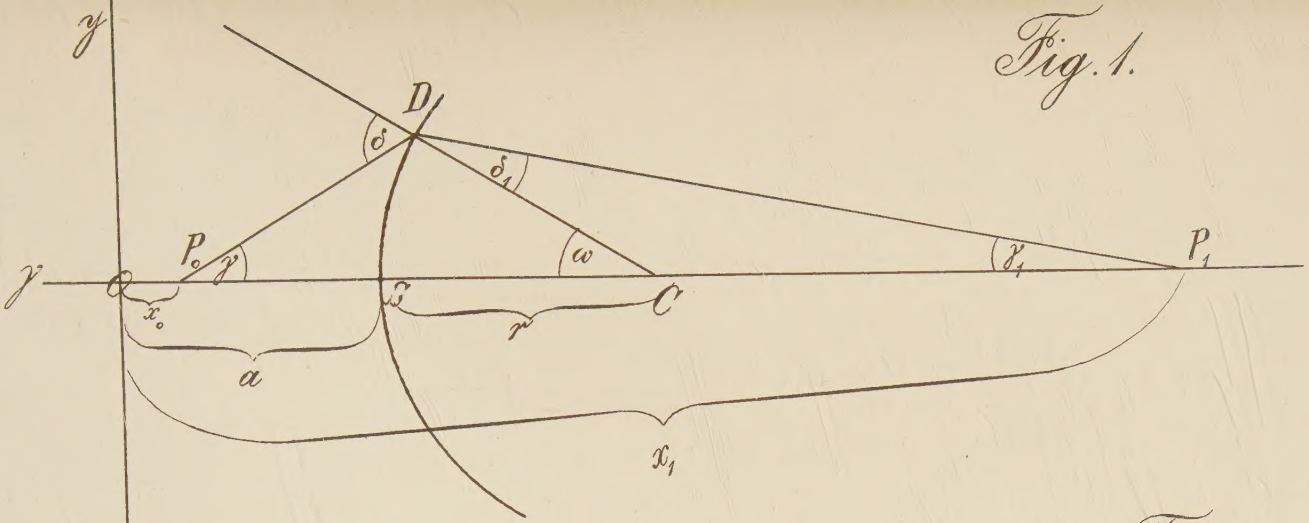

Fig. 1.

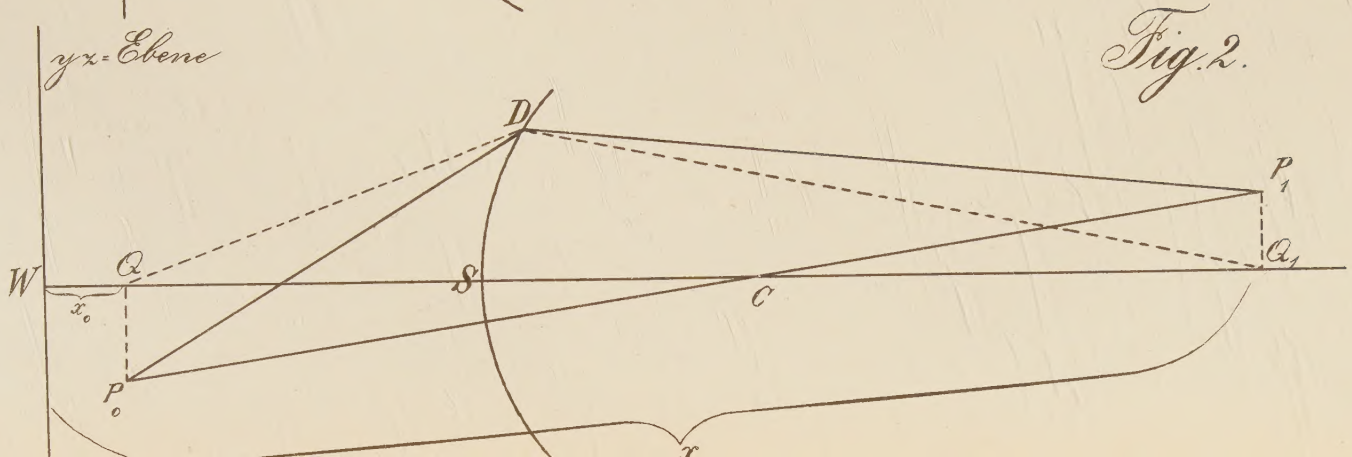

Fig. 2.